# The centipede is determined by its Laplacian spectrum

Romain Boulet

# The centipede is determined by its Laplacian spectrum

Romain Boulet
Institut de Mathématiques de Toulouse
Université de Toulouse et CNRS (UMR 5219)
boulet@univ-tlse2.fr

This paper was submitted on February 22nd, 2008 in *Comptes Rendus Mathématiques de l'Académie des Sciences de Paris*, accepted after revision on May 24th, 2008, available online on June 20th, 2008.

**Abstract**

A centipede is a graph obtained by appending a pendant vertex to each vertex of degree 2 of a path. In this paper we prove that the centipede is determined by its Laplacian spectrum. *To cite this article: R. Boulet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

**Résumé**

**Le mille-pattes est déterminé par le spectre du Laplacien.**

Un mille-pattes est un graphe obtenu en attachant un sommet pendant à chaque sommet de degré 2 d'une chaîne. Dans cet article nous montrons qu'un mille-pattes est déterminé par le spectre du Laplacien. *Pour citer cet article : R. Boulet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

## Version française abrégée

Le Laplacien $L$ d'un graphe est la matrice $L = D - A$ où $D$ est la matrice diagonale des degrés et $A$ est la matrice d'adjacence du graphe. Le spectre du Laplacien donne des informations sur la structure du graphe, comme la connexité (voir [2, 4] pour plus de détails), ces informations sont souvent insuffisantes pour reconstruire le graphe à partir du spectre et la question « Quels graphes sont déterminés par leur spectre ? » [2] demeure un problème difficile. En particulier il est connu [5] que presque aucun arbre n'est déterminé par le spectre du Laplacien et seules quelques familles d'arbres déterminés par leur spectre ont jusqu'alors été découvertes (citons par exemple [6] et [7]).

On appelle mille-pattes le graphe obtenu en attachant un sommet pendant à chaque sommet de degré 2 d'une chaîne (voir figure 1). Nous montrons dans cet article que le mille-pattes est déterminé par le spectre du Laplacien, enrichissant ainsi les familles connues d'arbres déterminés par le spectre du Laplacien.

On note $P_k$ la chaîne à $k$ sommets et $T$ le triangle. Deux graphes sont dits $A$-cospectraux (resp. $L$-cospectraux) s'ils ont même spectre pour la matrice d'adjacence (resp. le Laplacien). Les valeurs propres de la matrice d'adjacence d'un graphe $G$ d'ordre $n$ sont notées $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq ... \geq \lambda_n(G)$ et celles du Laplacien $\mu_1(G) \geq \mu_2(G) \geq ... \geq \mu_n(G)$. Le graphe représentatif des arêtes $\mathcal{L}(G)$ de $G$ a pour sommets les arêtes de $G$ et deux sommets sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes dans $G$ possèdent un sommet commun.

Les résultats suivants sont connus et permettent d'obtenir des informations sur la structure du graphe à partir du spectre du Laplacien :

**Théorème 1.** *[4] Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit $d(v)$ le degré d'un sommet $v$. Alors :*

$$\max\{d(v), v \in V(G)\} < \mu_1(G) \leq \max\{d(u) + d(v),\ uv \in E(G)\}$$

**Théorème 2.** *[2] Le nombre de sommets, d'arêtes, de composantes connexes et d'arbres couvrants d'un graphe peuvent être déduits du spectre de son Laplacien.*

**Théorème 3.** *[3, 4] Soit $G$ un arbre à $n$ sommets, alors $\mu_i(G) = \lambda_i(\mathcal{L}(G)) + 2$ pour $1 \leq i \leq n-1$.*

Le spectre de la matrice d'adjacence donne également des informations sur la structure du graphe ; il est en particulier connu que $\sum_i \lambda_i^k$ est égal au nombre de marches fermées de longueur $k$ dans $G$.

Soit $M$ un graphe, une marche fermée couvrante de longueur $k$ sur $M$ est une marche fermée de longueur $k$ sur $M$ parcourant *toutes* les arêtes de $M$ au moins une fois. On note $w_k(M)$ le nombre de marches fermées couvrantes de longueur $k$ sur $M$ et on définit l'ensemble $\mathcal{M}_k = \{M, w_k(M) > 0\}$. Le nombre sous graphes (non nécessairement induits) de $G$ isomorphes à $M$ est noté $|M(G)|$.

Ainsi le nombre de marches fermées de longueur $k$ de $G$ est :

$$\sum_{M \in \mathcal{M}_k} w_k(M)|M(G)|$$

Une première étape dans la démonstration consiste à étudier l'ensemble $\mathcal{T}$ des graphes définis ainsi : $G$ est le graphe $T$ ou $G$ est obtenu en identifiant un sommet de degré 2 de $H \in \mathcal{T}$ et un sommet de $T$.

Le sous-ensemble $\mathcal{T}_n$ de $\mathcal{T}$ constitué des graphes de $\mathcal{T}$ avec exactement $n$ triangles est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{A}_n$ des arbres à $n$ sommets de degré maximal inférieur ou égal á 3. Cette bijection est l'application $K : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{A}_n$ qui à un graphe $G$ associe son graphe des cliques $K(G)$. Les sommets de $K(G)$ sont les sous-graphes complets maximaux de $G$ et deux sommets de $K(G)$ sont adjacents si et seulement si l'intersection des sous graphes complets maximaux correspondants dans $G$ est non vide.

Nous montrons ensuite qu'aucun graphe de $\mathcal{T}$ ne peut être $A$-cospectral avec $K^{-1}(P_k)$. Pour cela nous dénombrons le nombre de marches fermées de longueur 7 pour $G \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ et nous obtenons

$$\sum_i \lambda_i^7 = 686t - 672 + 112t_3$$

où $t$ est le nombre de sommets de $K(G)$ et $t_3$ le nombre de sommets de degré 3 de $K(G)$. Il reste à remarquer que $K^{-1}(P_k)$ minimise cette quantité car $K(K^{-1}(P_k)) = P_k$ ne possède aucun sommet de degré 3.

La deuxième étape de la démonstration est de déterminer la distribution des degrés d'un graphe $G$ $L$-cospectral avec un mille-pattes, on note $n_i$ le nombre de sommets de $G$ de degré $i$. Le théorème 1 implique que le degré maximal de $G$ est inférieur ou égal à 5. Puis le théorème 2 et la proposition 1

**Proposition 1.** *i) Soit G un graphe, la somme des carrés des degrés de G peut être déduite du spectre du Laplacien.*
*ii) Soit G un graphe dont on connaît le nombre de triangles, alors la somme des cubes des degrés de G peut être déduite du spectre du Laplacien.*

nous permettent d'obtenir le système suivant que l'on résoud.

$$\begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = n \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 = 2n - 2 \\ n_1 + 4n_2 + 9n_3 + 16n_4 + 25n_5 = 5n - 8 \\ n_1 + 8n_2 + 27n_3 + 64n_4 + 125n_5 = 14n - 26 \end{cases}$$

On obtient alors que $G$ est un arbre d'ordre $n$ avec $\frac{n+2}{2}$ sommets de degré 1 et $\frac{n-2}{2}$ sommets de degré 3. Il en découle que $\mathcal{L}(G) \in \mathcal{T}$. Or, comme $G$ est $L$-cospectral avec un mille-pattes, le théorème 3 implique que $\mathcal{L}(G)$ est $A$-cospectral avec $K^{-1}\left(P_{\frac{n-2}{2}}\right)$ et donc $\mathcal{L}(G)$ est isomorphe à $K^{-1}\left(P_{\frac{n-2}{2}}\right)$ (première étape de la démonstration). On conclut en remarquant qu'un arbre avec $\frac{n+2}{2}$ sommets de degré 1 et $\frac{n-2}{2}$ sommets de degré 3 dont le graphe des lignes est isomorphe à $K^{-1}\left(P_{\frac{n-2}{2}}\right)$ est nécessairement un mille-pattes.

# 1 Introduction

The Laplacian of a graph is the matrix $L = D - A$ where $A$ is the adjacency matrix and $D$ is the diagonal matrix of degrees. Some structural properties of the graph such as connectivity can be determined from the Laplacian spectrum (see [2, 4] for more details). However the Laplacian spectrum does generally not determine the graph and the question *"Which graphs are determined by their spectrum ?"* [2] remains a difficult problem. Moreover it is known [5] that almost no trees are determined by their Laplacian spectrum and the few trees proved to be determined by their Laplacian spectrum (see for instance [6] or [7]) may be viewed in this sense as exceptionnal graphs.

A centipede is a tree constructed by appending a pendant vertex to each vertex of degree 2 of a path (see figure 1 for an example). We show in this article that a centipede is determined by its Laplacian spectrum, thus enlarging the known families of trees determined by their Laplacian spectrum.

To fix notations, the path with $k$ vertices is denoted by $P_k$ and the triangle by $T$. Two graphs are $A$-cospectral (resp. $L$-cospectral) if they have the same adjacency (resp. Laplacian) spectrum. For a graph $G$ of order $n$, the eigenvalues of the

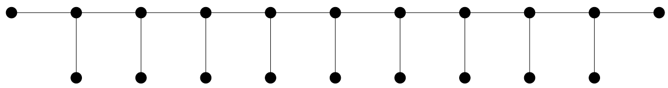

Figure 1: A centipede

adjacency matrix are denoted by $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq ... \geq \lambda_n(G)$ and the eigenvalues of the Laplacian by $\mu_1(G) \geq \mu_2(G) \geq ... \geq \mu_n(G)$ (when no confusion is possible we may omit to precise the graph).

We denote by $\mathrm{Sp}(G)$ the spectrum of the adjacency matrix of $G$. The line graph $\mathcal{L}(G)$ of a graph $G$ has the edges of $G$ as its vertices and two vertices of $\mathcal{L}(G)$ are adjacent if and only if the corresponding edges in $G$ have a commun vertex. For a vertex $v$ of a graph, $N(v)$ denotes the set of vertices adjacent to $v$ and $d(v) = |N(v)|$ the degree of $v$.

Here are some known results about the Laplacian spectrum.

**Theorem 1.** *[4] Let $G = (V, E)$ be a graph where $V$ (resp. $E$) is the set of vertices (resp. edges). Then:*

$$\max\{d(v), v \in V\} < \mu_1(G) \leq \max\{d(u) + d(v),\ uv \in E\}$$

**Theorem 2.** *[2] For the Laplacian matrix, the following can be deduced from the spectrum:*

- *The number of vertices.*
- *The number of edges.*
- *The number of connected components.*
- *The number of spanning trees.*

**Theorem 3.** *[3, 4] Let $G$ be a tree with $n$ vertices, then $\mu_i(G) = \lambda_i(\mathcal{L}(G)) + 2$ for $1 \leq i \leq n - 1$.*

The spectrum of the adjacency matrix also gives some informations about structural properties of the graph, for instance it is a classical result that the number of closed walks of length $k \geq 2$ is $\sum_i \lambda_i^k$.

We describe here a method to count the number of closed walks of given length in a graph.

Let $M$ be a graph, a *$k$-covering closed walk* in $M$ is a closed walk of length $k$ in $M$ running through *all* the edges at least once. Let $G$ be a graph, $M(G)$ denotes the set of all distincts subgraphs (not necessarily induced) of $G$ isomorphic to $M$ and $|M(G)|$ is the number of elements of $M(G)$. The number of $k$-covering closed walks in $M$ is denoted by $w_k(M)$ and we define the set $\mathcal{M}_k = \{M,\ w_k(M) > 0\}$. As a consequence, the number of closed walks of length $k$ in $G$ is:

$$\sum_{\lambda_i \in \mathrm{Sp}(G)} \lambda_i^k = \sum_{M \in \mathcal{M}_k} w_k(M)|M(G)| \tag{1}$$

# 2 Preliminaries: definition and spectral properties of a set $\mathcal{T}$ of graphs

Let $\mathcal{T}$ be the set of graphs $G$ defined as follow: $G$ is the triangle $T$ or $G$ is formed by identifying a vertex of degree 2 of a graph $H \in \mathcal{T}$ and a vertex of the graph $T$.

The clique graph of $G$, denoted by $K(G)$, is the graph whose vertex set is the set of maximal complete subgraphs of $G$ and two vertices of $K(G)$ are adjacent if and only if the corresponding complete subgraphs in $G$ share at least one vertex. The set of graphs in $\mathcal{T}$ with $n$ triangles is denoted by $\mathcal{T}_n$.

Let $\mathcal{A}_n$ be the set of trees on $n$ vertices with maximal degree lower than or equal to 3. The following proposition is straightfoward:

**Proposition 1.** *The application $K : \mathcal{T}_n \longrightarrow \mathcal{A}_n$ is one-to-one.*

Equation (1) enables us to compute the number of closed walks of length 7 of a graph $G \in \mathcal{T}$:

**Lemma 1.** *We have for $G \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$:*

$$\sum_{\lambda_i \in Sp(G)} \lambda_i^7 = 686t - 672 + 112t_3$$

*where $t$ is the number of vertices of $K(G)$ (ie the number of triangles in $G$) and $t_3$ is the number of vertices of degree 3 in $K(G)$.*

Proof : We use the relation

$$\sum_{\lambda_i \in \mathrm{Sp}(G)} \lambda_i^7 = \sum_{M \in \mathcal{M}_7} w_7(M)|M(G)|.$$

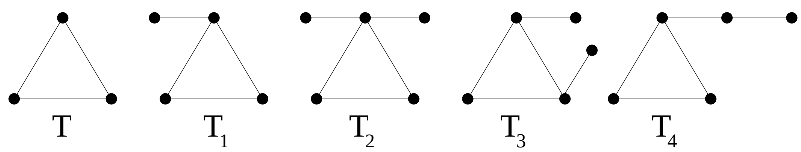


Figure 2: subgraphs of $G \in \mathcal{T}$ belonging to $\mathcal{M}_7$

As an odd closed walk necessarily runs through an odd cycle, it is clear that $M \in \mathcal{M}_7$ contains one and only one triangle. Only the graphs $T$, $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4 \in \mathcal{M}_7$ depicted in figure 2 can arise as subgraphs of $G \in \mathcal{T}$.

Let $t$ be the number of vertices of $K(G)$ and $t_i$, $1 \leq i \leq 3$, be the number of vertices of $K(G)$ of degree $i$. Since $K(G) \in \mathcal{A}_t$, we have $t_1 + t_2 + t_3 = t$ and $t_1 + 2t_2 + 3t_3 = 2t - 2$ (the sum of the degrees is twice the number of edges) showing $t_1 = t_3 + 2$ and $t_2 = t - 2 - 2t_3$.

For a triangle $T$ of $G$ (denoted by $T \subset G$), let $N(T)$ be the set of triangles of $G$ sharing one vertex with $T$ and $d(T) = |N(T)|$. Note that $d(T)$ is the degree of the vertex in $K(G)$ corresponding to $T \subset G$. We have:

- $|T(G)| = t$.
- $|T_1(G)| = 2\sum_{T\subset G} d(T) = 2\sum_{v\in V(K(G))} d(v) = 2(2t-2)$
- $|T_2(G)| = \sum_{T\subset G} d(T) = \sum_{v\in V(K(G))} d(v) = 2t-2$
- $|T_3(G)| = 4t_2 + 12t_3 = 4(t-2) + 4t_3$
- $|T_4(G)| = 4(2t-3+t_3)$, indeed let $e$ and $e'$ be the two bridges of $T_4$ such that $e$ shares a vertex with the triangle of $T_4$. Let $T$ be a triangle of $G$, then the number of $T_4$ such that $e$ and $e'$ belongs to $T$ is $2d(T)$. The number of $T_4$ such that $e$ belongs to $T$ and $e'$ does not is 4 if $d(T) = 2$ or 12 if $d(T) = 3$. This implies $|T_4(G)| = (2t_1+4t_2+6t_3)+(4t_2+12t_3)$, that is, $|T_4(G)| = 4(2t-3+t_3)$.

Let $A$, $A_i$ denote the adjacency matrices of $T$, $T_i$. The resolution of the equations $\mathrm{tr}(A^7) = w_7(T)$, $\mathrm{tr}(A_1^7) = w_7(T) + w_7(T_1)$, $\mathrm{tr}(A_2^7) = w_7(T) + 2w_7(T_1) + w_7(T_2)$, $\mathrm{tr}(A_3^7) = w_7(T) + 2w_7(T_1) + w_7(T_3)$, and $\mathrm{tr}(A_4^7) = w_7(T) + w_7(T_1) + w_7(T_4)$ yields $w_7(T) = 126$, $w_7(T_1) = 84$, $w_7(T_2) = 28$, $w_7(T_3) = 14$ and $w_7(T_4) = 14$.

This implies $\sum_i \lambda_i^7 = \sum_{M\in\mathcal{M}_7} w_7(M)|M(G)| = 686t - 672 + 112t_3$.

□

**Theorem 4.** *The $A$-spectrum characterises $K^{-1}(P_k)$ in $\mathcal{T}$.*

Proof : If $G \in \mathcal{T}$ is $A$-cospectral with $K^{-1}(P_k)$ then $G$ and $K^{-1}(P_k)$ have the same number of vertices and triangles. If $G$ and $K^{-1}(P_k)$ are not isomorphic then $K(G)$ possesses a vertex of degree 3 (so $G$ is not isomorphic to $T$) and the previous lemma implies $\sum_{\lambda_i\in\mathrm{Sp}(K^{-1}(P_k))} \lambda_i^7 < \sum_{\lambda_i\in\mathrm{Sp}(G)} \lambda_i^7$. This contradicts $A$-cospectrality of $G$ with $K^{-1}(P_k)$.

□

# 3 The centipede is determined by its Laplacian spectrum

**Proposition 2.** *i) The sum of squares of the degrees of a graph $G$ can be deduced from its Laplacian spectrum.*
*ii) The sum of cubes of the degrees of a graph $G$ can be deduced from its Laplacian spectrum and from the number of triangles contained in $G$.*

Proof : i) We have $tr(L^2) = tr(D^2) - 2tr(AD) + tr(A^2)$, but $tr(AD) = 0$, $tr(A^2) = 2m$ where $m$ is the number of edges and $tr(D^2)$ is the sum of squares of degrees of $G$.
ii) We have $tr(L^3) = tr(D^3) - tr(A^3) + 3tr(A^2D)$. But $tr(A^3)$ is six times the number of triangles of $G$, $tr(A^2D)$ is the sum of squares of degrees of $G$ and $tr(D^3)$ is the sum of cubes of $G$.

□

**Proposition 3.** *If $G$ is a graph on $n$ vertices $L$-cospectral with a centipede, then $G$ is a tree having $\frac{n-2}{2}$ vertices of degree 3 and $\frac{n+2}{2}$ vertices of degree 1.*

PROOF : Theorem 1 implies that the maximal degree of $G$ is at most 5. For $i = 1, ..., 5$, let $n_i$ be the number of vertices of degree $i$ of $G$. The Laplacian spectrum of $G$ determines the number of vertices, the number of edges, the sum of squares of the degrees and the sum of cubes of the degrees, that is:

$$\begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = n \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 = 2n - 2 \\ n_1 + 4n_2 + 9n_3 + 16n_4 + 25n_5 = 5n - 8 \\ n_1 + 8n_2 + 27n_3 + 64n_4 + 125n_5 = 14n - 26 \end{cases}$$

This system implies $n_2 = n_4 = -4n_5 = 2(n+2-2n_1)$ showing $n_2 = n_4 = n_5 = 0$, $n_3 = \frac{n-2}{2}$, $n_2 = 0$ and $n_1 = \frac{n+2}{2}$.

□

**Proposition 4.** *Let $G$ be a tree with $\frac{n-2}{2}$ vertices of degree 3 and $\frac{n+2}{2}$ vertices of degree 1, if $\mathcal{L}(G)$ is isomorphic to $K^{-1}(P_k)$ then $G$ is a centipede.*

PROOF : If $G$ is not a centipede then it contains the subgraph $H$ depicted in figure 3. This implies that $\mathcal{L}(G)$ is not isomorphic to $K^{-1}(P_k)$.

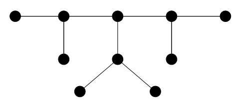

Figure 3: Subgraph of a tree with $\frac{n-2}{2}$ vertices of degree 3 and $\frac{n+2}{2}$ vertices of degree 1 and different from a centipede

□

**Theorem 5.** *The centipede is determined by its Laplacian spectrum.*

PROOF : Let $G$ be a graph with $n$ vertices $L$-cospectral with the centipede on $n$ vertices. According to proposition 3, $G$ is a tree with $\frac{n-2}{2}$ vertices of degree 3 and $\frac{n+2}{2}$ vertices of degree 1. As $G$ is $L$-cospectral with a centipede, theorem 3 implies that $\mathcal{L}(G)$ is $A$-cospectral with the line graph of the centipede, that is, $\mathcal{L}(G)$ is $A$-cospectral with $K^{-1}\left(P_{\frac{n-2}{2}}\right)$. Moreover $\mathcal{L}(G) \in \mathcal{T}$, so $\mathcal{L}(G)$ is isomorphic to $K^{-1}\left(P_{\frac{n-2}{2}}\right)$ (theorem 4) and $G$ is a centipede by proposition 4.

□

Since the Laplacian eigenvalues of a graph gives the Laplacian eigenvalues of its complement [4], we have the following corollary:

**Corollary 1.** *The complement of a centipede is determined by its Laplacian spectrum.*

*Remark* 1. *Non-uniquiness in $\mathcal{T}_n$ of graphs maximising $t_3$ prevents unfortunately the adaptation of our proof to graphs in $\mathcal{T}_n$ with $t_3$ maximal.*

## Acknowledgements

The author would like to thank the referee for his attentive reading and his relevant remarks.

## References

[1] N. Biggs, Algebraic Graph Theory, Cambridge University Press (1974).

[2] E.R. van Dam, W.H. Haemers, Which graphs are determined by their spectrum?, Linear Algebra and its Applications 373 (2003) 241-272.

[3] M. Doob, Eigenvalues of graphs, in: L.W. Beineke, R.J. Wilson (Eds.),Topics in Algebraic Graph Theory, Cambridge University Press (2004) 30-55.

[4] B. Mohar, The Laplacian Spectrum of Graphs, Graph Theory, Combinatorics, and Applications, 2 (1991) 871-898.

[5] M.W. Newman, The Laplacian Spectrum of Graphs, Masters Thesis, University of Manitoba, 2000.

[6] G.R. Omidi, K. Tajbakhsh, Star-like trees are determined by their Laplacian spectrum, Linear Algebra and its Applications 422 (2007) 654-658.

[7] X. Shen, Y. Hou, Y. Zhang, Graph $Z_n$ and some graphs related to $Z_n$ are determined by their spectrum, Linear Algebra and its Applications, 404 (2005) 58-68.